

§ 17. Элементы теории относительности

17.1. При какой относительной скорости v движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составляет 25%?

Решение:

Имеем $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ — (1). По условию $\frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \frac{l}{l_0} = 0,25$,

отсюда $l = 0,75l_0$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,75; \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = 0.5625; \quad v = \sqrt{c^2(1 - 0.5625)} = \\ = 1,98 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

17.2. Какую скорость v должно иметь движущееся тело, чтобы его предельные размеры уменьшились в 2 раза?

Решение:

Пусть тело движется с постоянной скоростью v относительно инерциальной системы K' . Поскольку в системе

K' длина тела $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, а по условию задачи $l_0 = 2l$,

то $l = 2l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Отсюда $\frac{1}{4} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$, следовательно,

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

17.3. Мезоны космических лучей достигают поверхности Земли с самыми разнообразными скоростями. Найти релятивистское сокращение размеров мезона, скорость которого равна 95% скорости света.

Решение:

Т. к. поперечные размеры тела при его движении не меняются, то изменение объема тела определяется лоренцевым сокращением продольного размера, определяемого

формулой $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$. Следовательно, объем тела сокращается по аналогичной формуле $V = V_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$.

Подставляя числовые данные, получим $V = 0,312V_0$. Тогда относительное изменение объема $\delta = \frac{V_0 - V}{V_0} \cdot 100\% = 68,8\%$.

17.4. Во сколько раз увеличивается продолжительность существования нестабильной частицы по часам неподвижного наблюдателя, если она начинает двигаться со скоростью, составляющей 99% скорости света?

Решение:

Промежуток времени $\Delta\tau$ в системе, движущейся со скоростью v по отношению к наблюдателю, связан с промежутком времени $\Delta\tau_0$ в неподвижной для наблюдателя

системе соотношением $\Delta\tau = \frac{\Delta\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ — (1), где $\beta = \frac{v}{c}$ —

(2) — относительная скорость, c — скорость света. По условию $\beta = 99\% = 0,99$. Из формулы (1) получаем

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 7,08 \text{ раза.}$$

17.5. Мезон, входящий в состав космических лучей, движется со скоростью, составляющей 95% скорости света. Какой промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя соответствует одной секунде «собственного времени» мезона?

Решение:

Промежуток времени по часам неподвижного наблюдателя

(см. задачу 17.4) составляет $\Delta\tau = \frac{\Delta\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где

$\Delta\tau_0 = 1$ с — «собственное время» мезона, $\beta = 95\% = 0,95$.

Подставляя числовые данные, получим $\Delta\tau = 3,2$ с.

17.6. На сколько увеличится масса α -частицы при ускорении ее от начальной скорости, равной нулю, до скорости, равной 0,9 скорости света?

Решение:

Зависимость массы m тела от скорости его движения да-

ется уравнением $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, где $m_0 = 6,6 \cdot 10^{-27}$ кг —

масса покоя α -частицы. По условию $v = 0,9 \cdot c$, тогда

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-0,81c^2/c^2}} = 2,3m_0. \quad \text{Отсюда} \quad \Delta m = 2,3m_0 - m_0 = \\ = 1,3m_0 = 8,6 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

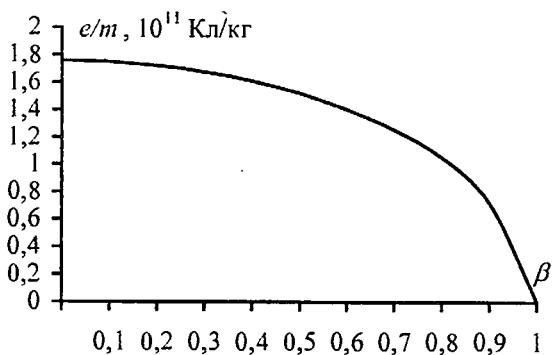
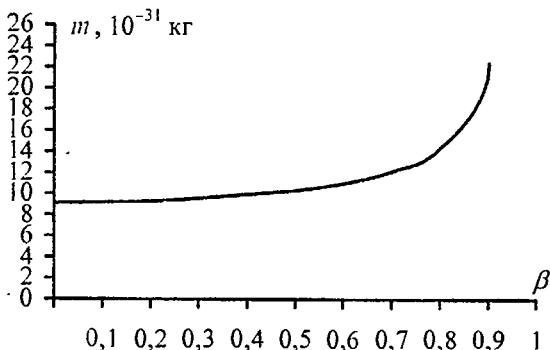
17.7. Найти отношение $\frac{e}{m}$ заряда электрона к его массе для скоростей: а) $v \ll c$; б) $v = 2 \cdot 10^8$ м/с; в) $v = 2,2 \cdot 10^8$ м/с; г) $v = 2,4 \cdot 10^8$ м/с; д) $v = 2,6 \cdot 10^8$ м/с; е) $v = 2,8 \cdot 10^8$ м/с. Составить таблицу и построить графики зависимостей m и $\frac{e}{m}$ от величины

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{для указанных скоростей.}$$

Решение:

Зависимость массы электрона m от скорости его движения

v дается уравнением $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $m_0 = 9,11 \times$



$\times 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона, $\beta = \frac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость.

Элементарный заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Составим таблицу и построим графики зависимостей m и $\frac{e}{m}$ от величины β для указанных скоростей.

$v, 10^8$ м/с	$v << c$	2	2,2	2,4	2,6	2,8
β	0	0,67	0,73	0,8	0,87	0,93
$m, 10^{-31}$ кг	9,11	12,22	13,4	15,18	18,26	25,38
$e/m, 10^{11}$ Кл/кг	1,76	1,31	1,19	1,05	0,876	0,631

17.8. При какой скорости v масса движущегося электрона вдвое больше его массы покоя?

Решение:

Масса движущегося электрона (см. задачу 17.7) дается

уравнением $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ — (1), где $\beta = \frac{v}{c}$ — отно-

сительная скорость. Из (1) имеем $\frac{m_0}{m} = \sqrt{1 - \beta^2}$ — (3).

Подставляя (2) в (3), получаем $\frac{m_0}{m} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ — (4). По

условию $\frac{m_0}{m} = \frac{1}{2}$ — (5). Приравнивая правые части со-

отношений (4) и (5), получаем $\frac{1}{2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, откуда нахо-

дим искомую скорость электрона $v = \frac{c\sqrt{3}}{2} = 2,6 \cdot 10^8$ м/с.

17.9. До какой энергии W_k можно ускорить частицы в циклотроне, если относительное увеличение массы частицы не должно превышать 5%? Задачи решить для: а) электронов; б) протонов; в) дейтонов.

Решение:

Имеем $W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) = c^2 \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 \right)$;

$W_k = c^2 (m - m_0)$, откуда $\frac{W_k}{m_0} = c^2 \frac{m - m_0}{m_0}$ — (1). По условию

$\frac{m - m_0}{m_0} = 0,05$, тогда из (1) получим $W_k = 0,05 m_0 c^2$. Под-

ставляя числовые данные, получим: а) $W_k = 25,6 \cdot 10^3$ эВ;

б) $W_k = 47 \cdot 10^6$ эВ; в) $W_k = 94 \cdot 10^6$ эВ.

17.10. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его скорость составляла 95% скорости света?

Решение:

Согласно закону сохранения энергии $mc^2 + eU = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ или $eU = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right)$ — (1). Подставляя в (1) значение $v = 0,95 \cdot c$, получим $eU = 2,2mc^2$, откуда $U = \frac{2,2mc^2}{e} = 1,1 \cdot 10^6 \text{ В}$.

17.11. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти протон, чтобы его продольные размеры стали меньше в 2 раза?

Решение:

Потенциальная энергия протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U , равна $W_n = eU$. Зависимость кинетической энергии протона от скорости его движения v дается уравнением $W_k = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$, где

$m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$ — масса покоя протона, $\beta = \frac{v}{c}$ — отно-

сительная скорость. Работа, совершенная полем при перемещении протона, равна приобретенной им кинетической

энергии, т. е. $eU = W_k = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ или $U = \frac{m_0c^2}{e} \times$

$\times \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ — (1). Продольные размеры протона l ,

движущегося со скоростью v относительно некоторой

системы отсчета, связанны с продольными размерами протона l_0 , неподвижного в этой системе, соотношением

$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$, откуда $\frac{l}{l_0} = \sqrt{1 - \beta^2}$ — (2). Подставляя (2) в

(1), окончательно получаем $U = \frac{m_0 c^2}{e} \left(\frac{l_0}{l} - 1 \right) = 940 \text{ МВ.}$

17.12. Найти скорость v мезона, если его полная энергия в 10 раз больше энергии покоя.

Решение:

Полная энергия мезона W складывается из его кинетической энергии W_k и энергии покоя W_0 . Поскольку

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right), \quad \text{а} \quad W_0 = m_0 c^2, \quad \text{то} \quad W = W_k + W_0 =$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad \text{По условию} \quad \frac{W}{W_0} = 10, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 10. \quad \text{От-}$$

$$\text{сюда} \quad \beta = \frac{v}{c} = 0,995; \quad v = \beta c = 2,985 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

17.13. Какую долю β скорости света должна составлять скорость частицы, чтобы ее кинетическая энергия была равна ее энергии покоя?

Решение:

Кинетическая энергия частицы $W = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)$, где

$\beta = \frac{v}{c}$ и есть искомая величина. По условию $W = W_0 = mc^2$.

Тогда $mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$, откуда $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2$;
 $\beta = 0,866 \cdot 100\% = 86,6\%$.

17.14. Синхрофазотрон дает пучок протонов с кинетической энергией $W_k = 10$ ГэВ. Какую долю β скорости света составляет скорость протонов в этом пучке?

Решение:

Зависимость кинетической энергии протонов от скорости их движения дается уравнением $W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$.

Отсюда доля скорости протонов от скорости света

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{(W_k + m_0 c^2)^2}} = 0,996 \cdot 100\% = 99,6\%.$$

17.15. Найти релятивистское сокращение размеров протонов в условиях предыдущей задачи.

Решение:

Диаметр протона d , движущегося со скоростью v относительно некоторой системы отсчета, связан с диаметром протона d_0 , неподвижного в этой системе, соотношением

$d = d_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ — (1). Из задачи 17.14 доля скорости протонов от скорости света $\beta = 99,6\% = 0,996$. Релятивистское сокращение размеров протона из формулы (1)

$$\text{равно } \frac{d_0 - d}{d_0} = 1 - \sqrt{1 - \beta^2} = 0,911 \cdot 100\% = 91,1\%.$$

17.16. Циклотрон дает пучок электронов с электрической энергией $W_k = 0,67$ МэВ. Какую долю β скорости света составляет скорость электронов в этом пучке?

Решение:

Доля скорости электронов от скорости света (см. задачу

$$17.14) \text{ равна } \beta = \sqrt{1 - \frac{m_0 c^4}{(W_k + m_0 c^2)^2}} = 0,899 \cdot 100\% = 89,9\%.$$

17.17. Составить для электронов и протонов таблицу зависимости их кинетической энергии W_k от скорости v (в долях скоростей света) для значений β , равных: 0,1; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 0,95; 0,999.

Решение:

Зависимость кинетической энергии электронов и протонов от скорости их движения дается уравнением $W_k = m_0 c^2 \times$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \quad (1), \text{ где масса покоя электрона } m_{0(e)} = 9,11 \times$$

$\times 10^{-31}$ кг, масса покоя протона $m_{0(p)} = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг. Подставляя в уравнение (1) значения β , заполняем таблицу:

β	0,1	0,5	0,6	0,7
$W_{k(e)}$, Дж	$9,2 \cdot 10^{-17}$	$1,26 \cdot 10^{-16}$	$2,04 \cdot 10^{-16}$	$3,28 \cdot 10^{-16}$
$W_{k(p)}$, Дж	$1,5 \cdot 10^{-12}$	$1,74 \cdot 10^{-11}$	$3,76 \cdot 10^{-11}$	$6,01 \cdot 10^{-11}$

Продолжение

β	0,8	0,9	0,95	0,999
$W_{k(e)}$, Дж	$5,46 \cdot 10^{-16}$	$1,06 \cdot 10^{-15}$	$1,81 \cdot 10^{-15}$	$1,75 \cdot 10^{-14}$
$W_{k(p)}$, Дж	$1,01 \cdot 10^{-10}$	$1,95 \cdot 10^{-10}$	$3,31 \cdot 10^{-10}$	$3,21 \cdot 10^{-9}$

17.18. Масса движущегося электрона вдвое больше его массы покоя. Найти кинетическую энергию W_k электрона.

Решение:

Масса движущегося электрона (см. задачу 17.7) дается

$$\text{уравнением } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1), \text{ где } m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг} —$$

его масса покоя. Кинетическая энергия движущегося элек

$$\text{трана } W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \quad (2). \text{ Из уравнения (1) имеем}$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3). \text{ Подставляя (3) в (2), получаем}$$

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{m}{m_0} - 1 \right) = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ Дж.}$$

17.19. Какому изменению массы Δm соответствует изменение энергии на $\Delta W = 4,19$ Дж?

Решение:

Зависимость кинетической энергии тела от скорости его

$$\text{движения дается уравнением } W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \quad (1),$$

а зависимость массы тела от скорости его движения —

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2). \text{ Изменение массы тела в процессе его}$$

движения $\Delta m = m - m_0 \quad (3)$. Подставляя (2) в (3)

$$\text{получаем } \Delta m = m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \quad (4). \text{ Поскольку}$$

кинетическая энергия покоя равна нулю, то изменение

кинетической энергии $\Delta W_k = W_k \quad (5)$. Подставляя (1) в

(5) с учетом (4), получаем $\Delta W_k = \Delta m c^2$, откуда изменение массы тела $\Delta m = \frac{\Delta W_k}{c^2} = 4,6 \cdot 10^{-17}$ кг.

17.20. Найти изменение энергии ΔW , соответствующее изменению массы на $\Delta m = 1$ а.е.м.

Решение:

Изменение кинетической энергии тела в процессе его движения (см. задачу 17.19) определяется соотношением $\Delta W_k = \Delta m c^2 = 934$ МэВ.

17.21. Найти изменение энергии ΔW , соответствующее изменению массы на $\Delta m = m_e$.

Решение:

Изменение кинетической энергии тела в процессе его движения (см. задачу 17.19) определяется соотношением $\Delta W_k = \Delta m c^2$. По условию $\Delta m = m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг, тогда $\Delta W_k = 8,2 \cdot 10^{-14}$ Дж.

17.22. Найти изменение массы Δm_μ , происходящее при образовании $v = 1$ моль воды, если реакция образования воды такова:
 $2\text{H}_2 + \text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O} + 5,75 \cdot 10^5$ Дж.

Решение:

Имеем $\Delta m_\mu = \frac{\Delta W}{c^2}$ — (1). При образовании двух молей воды освобождается энергия $\Delta W' = 5,75 \cdot 10^5$ Дж, тогда $\Delta W = \frac{\Delta W'}{2} = 2,875 \cdot 10^5$ Дж — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $\Delta m_\mu = 3,2 \cdot 10^{-9}$ г/моль.

17.23. При делении ядра урана $^{235}_{92}U$ освобождается энергия $W = 200 \text{ МэВ}$. Найти изменение массы Δm_μ при делении $v = 1 \text{ моль}$ урана.

Решение:

Изменение массы тела в процессе его движения (см. задачу 17.19) определяется соотношением $\Delta m = \frac{\Delta W_k}{c^2}$ — (1).

При делении v молей урана освобождается энергия $\Delta W = WvN_A$ — (2), где W — энергия, освобождаемая при делении одного ядра. Подставляя (2) в (1), получаем

$$\Delta m_\mu = \frac{WvN_A}{c^2} = 0,214 \text{ г/моль.}$$

17.24. Солнце излучает поток энергии $P = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. За какое время τ масса Солнца уменьшится в 2 раза? Излучение Солнца считать постоянным.

Решение:

Поток энергии, излучаемый Солнцем, определяется соотношением $P = \frac{\Delta W_k}{\tau}$ — (1). Изменение энергии Солнца в процессе излучения (см. задачу 17.19) $\Delta W_k = \Delta m c^2$ — (2).

По условию $\Delta m = \frac{1}{2}m_0$ — (3), где $m_0 = 1,989 \cdot 10^{30}$ — начальная масса Солнца. Подставляя (2) в (1), с учетом (3), получаем $P = \frac{m_0 c^2}{2\tau}$, откуда время, за которое масса Солнца уменьшится в 2 раза, равно

$$\tau = \frac{m_0 c^2}{2P} = 7,2 \cdot 10^{12} \text{ лет.}$$